

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tuanny da Silva Maciel

**A História da Matemática e o estabelecimento de elos entre
o Ensino Superior e a Educação Básica**

João Pessoa – PB

2011

Tuanny da Silva Maciel

**A História da Matemática e o estabelecimento de elos entre
o Ensino Superior e a Educação Básica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para obtenção do título de
licenciada em Matemática.

Orientador: Prof^a. Dr^a Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – PB

2011

M152h Maciel, Tuanny da Silva
A história da matemática e o estabelecimento de elos entre o ensino superior ... / Tuanny da Silva Maciel. – João Pessoa, 2011.
58f. : il. -

Monografia (Graduação) – UFPB/CCEN.
Orientadora: Profª Drª Rogéria Gaudêncio do Rêgo
Inclui referências.

1. Matemática - História 2. Ensino - Aprendizagem.
3. Cálculo diferencial e integral. I. Título.

BS/CCEN

CDU: 51(091)(043.2)

A História da Matemática e o estabelecimento de elos entre o Ensino Superior e a Educação Básica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado em: ____/____/____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr^a Rogéria Gaudencio do Rêgo (Orientadora)

Prof. Ms. Antônio Sales da Silva

Prof. Dr^a.Valdenilza Ferreira da Silva

À minha mãe,

Por todo apoio e esforço nessa caminhada e pelo exemplo de mãe e mulher que é em minha vida.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a vida e sabedoria para enfrentar todos os obstáculos que surgiram e conseguir alcançar a realização dessa etapa tão grandiosa da minha vida.

- Aos meus pais, José Ariosvaldo Rodrigues Maciel e Josefa Pereira da Silva Maciel, que tanto me deram apoio e me ajudaram de forma direta a seguir nessa caminhada, sem deixar faltar nada que viesse a atrapalhá-la.

- Ao meu irmão, Danilo da Silva Maciel, pela preocupação incessante com o meu futuro e por nunca ter me abandonado nos momentos mais difíceis que passei nessa trajetória.

- A minha orientadora Rogéria Gaudencio do Rêgo, por ter me apoiado na hora da escolha do tema deste trabalho, ajudando-me a encarar as dificuldades e a enfrentá-las com coragem.

- Ao meu orientador do projeto de Iniciação científica, Fágner Dias Araruna, que tanto contribuiu para a minha formação matemática e profissional.

- Aos professores do Departamento de Matemática, em especial aos professores Antônio Sales, Uberlândio Batista Severo e Everaldo Souto de Medeiros, que estiveram comigo desde o meu ingresso na UFPB, dando-me apoio e contribuindo para minha formação acadêmica.

- As minhas amigas-irmãs, Enieze Cardoso e Kelyane Barboza, que sempre estiveram comigo e nunca cessaram de me ajudar em todos os pontos da minha vida. A elas meu obrigado todo especial por serem minhas irmãs.

- A Wendson, que sempre esteve presente em minha vida acadêmica e pessoal, encarando meus estresses e perturbações provocadas pela correria do dia a dia.

- Enfim, a todos os meus amigos e colegas que sempre me incentivaram a continuar e a seguir em frente de cabeça erguida.

RESUMO

Na tentativa de compreender as ligações que podem ser estabelecidas entre a Matemática que se estuda no ensino superior e a Matemática que se ensina na educação básica, nesse trabalho foi dada uma atenção especial à História da Matemática, aqui concebida como metodologia de ensino com grande potencial para motivar os alunos a aprenderem Matemática. Para nós, ela possibilita conhecer conteúdos curriculares em geral apresentados como prontos e acabados, em uma perspectiva social e humana, aproximando os alunos daquilo que estudam. Os principais autores citados em nosso trabalho são Juliana Guedin e Edison Uggioni, e nele trazemos um recorte da origem do Cálculo Diferencial e Integral e uma breve discussão acerca da importância do uso da História da Matemática no ensino, seja ele básico ou superior. Focamos nosso texto nos métodos da exaustão e das quadraturas, dentre elas a quadratura da parábola e do círculo e, posteriormente, traçamos um paralelo entre esses métodos históricos e propostas de ensino de conteúdos da educação básica. Dentre elas situam-se as presentes em um aplicativo do MEC e em um livro do 9º ano do ensino fundamental, voltadas para o trabalho com o cálculo da área de um círculo. Concluimos que há uma estreita conexão entre elas e as primeiras formas de cálculo do valor dessa grandeza, o que poderia ser usado para aumentar a motivação dos alunos da Licenciatura em Matemática para o estudo do Cálculo. Realizamos ainda uma pesquisa com professores e alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, da UFPB, com questões sobre o processo de ensino-aprendizagem da disciplina e algumas considerações sobre mudanças que poderiam promover a superação das dificuldades apontadas por alunos e professores que participaram de nossa investigação.

Palavras-chaves: Ensino-aprendizagem; História da Matemática; Cálculo Diferencial e Integral; Quadratura; Método da exaustão.

ABSTRACT

Trying to understand the links can be established between the Mathematic that is studied on the college and the other taught during the middle and high school, on this work was given a special attention to the history of mathematics, here conceived as a teaching methodology with a great potential to motivate students to learn math. For us, it makes possible to know curricular contents generally presented as finished and ready, in a social and human perspective, approaching students to what they study. The main authors cited in our academic work are Juliana Guedin and Edison Uggioni, and on it we bring a clipping from the origin of the differential and integral calculus and a short discussion about the importance to the use of math's history in teaching, whether basic or higher. We focus our text in the exhaust and quadratures methods, including the parable's square and the circle, and after, we traced a parallel between these proposals and historical methods of teaching content on the primary education and high school. Within it lie the present one MEC's application and a ninth year book of the primary, directed to work the calculation of a circle's area. We conclude there's a close connection between them and the first ways of calculating the value of this quantity, which could be used to increase the motivation of students from the Degree in Mathematics on the study of calculus. We also carried out a survey with the teachers and students from the disciplines of Differential and Integral Calculus I from UFPB, with questions about the process of teaching and learn from the discipline and some thoughts on changes that could promote the overcoming of the difficulties noted by which participated in our research.

Keywords: Teaching and Learning; History of Mathematics; Differential and Integral Calculus; Square; Method of exhaustion.

SUMÁRIO

1. INTRODUZINDO NOSSO TEMA DE TRABALHO	9
1.1 Breve retrospectiva de nossa trajetória na graduação	9
1.2 Nosso objeto e problema da pesquisa	10
1.3 Objetivos da pesquisa	11
1.4 Justificativa preliminar de seleção do nosso tema	12
1.5 Nossa metodologia de investigação	14
1.6 Estrutura do nosso trabalho	14
 2. RECORTE TEÓRICO SOBRE NOSSO TEMA DE INVESTIGAÇÃO	 16
2.1 As contribuições da História da Matemática na construção de conhecimento matemático	15
2.2 A história do Cálculo Diferencial e Integral	19
2.3 O método de exaustão e a quadratura da parábola	21
2.4 O ensino de Cálculo Diferencial e Integral e a História da Matemática	31
 3 A HISTÓRIA DO CÁLCULO E A MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO	 36
3.1 O ensino de Geometria na geometria na educação básica: a ideia de área de figuras planas	36
3.2 O ensino da área do círculo na educação básica	37
3.2.1 O caso do ensino fundamental- proposta de trabalho em Dante	38
3.2.2 O método egípcio para calcular a área do círculo	39
3.2.3 Análise de aplicativo do MEC	44
3.2.4 A cubagem da terra pelos camponeses brasileiros	48
 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	 52

5 REFERÊNCIAS	55
----------------------	-----------

6 APÊNDICES	57
--------------------	-----------

1. INTRODUZINDO NOSSO TEMA DE TRABALHO

1.1 DE NOSSA TRAJETÓRIA NA GRADUAÇÃO

Iniciaremos nossa trajetória reflexiva acerca de nossa formação, tomando como ponto de partida o Ensino Médio, onde nasceu nossa decisão de ingressar na Universidade Federal da Paraíba, no curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, o que aconteceu no ano de 2008.

Inicialmente não sabíamos, como a maior parte dos alunos que prestam exame de acesso à Universidade, quais as funções que exercem um licenciado e um bacharel, após concluírem um curso de Graduação. A única certeza que tínhamos era a vontade de lecionarmos após o término do curso.

Ao ingressar na Universidade, aos poucos fomos descobrindo a natureza das diferenças entre as duas modalidades de formação em uma mesma área de conhecimento e já no terceiro período letivo tivemos que optar por uma das modalidades, sendo nossa escolha pela Licenciatura.

Inicialmente, pensávamos que iríamos aprender todos os conteúdos que são lecionados no Ensino Básico, juntamente com a melhor forma de ministrar tais assuntos. Porém, não foi isso o que aconteceu. Também percebemos que, na maioria das vezes, não foi estabelecido nenhum elo entre o que estudávamos nas disciplinas da Graduação e o que iríamos ensinar nos Ensinos Fundamental e Médio; entre a Matemática e outras áreas de conhecimento; e quase não foram explorados conteúdos matemáticos sob um ângulo histórico.

Na Graduação presenciamos, ainda, momentos em que a Licenciatura não recebia a devida atenção, sendo seus alunos alvo de preconceitos, uma vez que, para muitos professores, a Licenciatura é concebida como um curso “mais fácil” ou procurado por aqueles que “correm do Bacharelado”.

Esta, porém, é uma visão distorcida pois, ao contrário do que muitos pensam, o licenciado tem que dominar não apenas o conhecimento matemático mas, também, dominar a prática docente adequada para ministrá-los, com foco na

preocupação com a qualidade de aprendizagem dos alunos, o que torna o curso de Licenciatura um curso mais complexo.

Com essa percepção, decidimos explorar em nosso Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), essa linha de pensamento, buscando discutir as diferenças e aproximações existentes entre as duas modalidades do Curso de Matemática, tomando como campo de reflexão central a Licenciatura, nossa opção de formação, sem com isso desconsiderar a importância do Bacharelado.

Nosso trabalho apresenta um recorte reflexivo tendo como tema o uso da História da Matemática no ensino da disciplina, nos diversos níveis de escolaridade. Para tal, tomamos como foco de discussão, elementos do conteúdo ministrado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, pelas razões que serão apresentadas adiante.

1.2 NOSSO OBJETO E PROBLEMA DA PESQUISA

Baseando-nos no pouco contato que tivemos com a História da Matemática, ao longo de nosso percurso escolar na Graduação, percebemos que ela poderia ser uma grande aliada para o processo de melhoria do ensino, fosse ele na Educação Básica ou no Ensino Superior.

O uso da História da Matemática como metodologia de ensino é defendido em documentos de referência nacional, o que discutiremos no próximo Capítulo, e pode possibilitar, em nossa concepção, a construção de elos entre nossa formação docente inicial e nossa prática futura de sala de aula.

Com a finalidade de termos uma perspectiva de discussão de nossas ideias, tomamos como base a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, apresentando:

- Um breve recorte histórico de seu surgimento e evolução, até os dias atuais;
- Os desafios relacionados ao seu ensino na Graduação;
- Uma reflexão acerca das diferenças demandadas pela formação dos alunos das diferentes modalidades do curso de Matemática da UFPB, em relação aos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral; e

- Identificando possíveis conexões entre aquilo que se estuda na disciplina e conteúdos ministrados na Educação Básica, na disciplina de Matemática.

Exploramos o viés da História da Matemática, buscando ampliar nossa compreensão acerca de seu desenvolvimento, considerando os problemas que geraram a construção dos conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. Com isso, pretendemos identificar elementos que podem ser explorados no ensino dessa disciplina na Graduação, considerando, em particular as especificidades do curso de Licenciatura e sua relação com conteúdos matemáticos da Educação Básica, que serão ensinados por seus egressos.

Além disso, buscamos fazer uma investigação acerca dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade Federal da Paraíba, buscando levantar elementos relativos à maneira como os professores ministram as aulas, as dificuldades que identificam no processo e os resultados que obtém. Com esse fim, fizemos uma pesquisa com professores e alunos da instituição, dando destaque aos alunos da Licenciatura em Matemática, visto que esse é o foco de nossa pesquisa.

Desse modo, traçamos como questão central de investigação: *que contribuições a História do Cálculo Diferencial e Integral pode trazer para o ensino dessa disciplina, considerando as especificidades de formação do licenciando em Matemática?*

Na busca de possíveis respostas, ainda que provisórias, e incompletas, para nossa questão central de investigação, traçamos os objetivos transcritos em seguida.

1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando a questão anteriormente delimitada, temos como objetivo central de nosso trabalho de pesquisa, *identificar e analisar as possíveis contribuições que a História do Cálculo Diferencial e Integral pode trazer para o ensino dessa disciplina, considerando as especificidades de formação do licenciando em Matemática e sua prática posterior na Educação Básica.*

Para alcançarmos nosso objetivo geral, selecionamos os seguintes objetivos específicos:

- Levantar dados relativos ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, realizando entrevista com professores e alunos dessa disciplina em nossa instituição;
- Ampliar nosso conhecimento relativo a elementos da História da Matemática, em particular do Cálculo Diferencial e Integral e sobre o uso da História da Matemática no ensino de conteúdos da área, no referencial teórico pertinente;
- Explorar elementos da História do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva de seu uso no ensino da disciplina, considerando o perfil de formação do aluno da Licenciatura em Matemática.

1.4 JUSTIFICATIVA PRELIMINAR DE SELEÇÃO DE NOSSO TEMA

Na busca de melhoria de nossa compreensão acerca dos perfis dos profissionais em formação nos cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática, recorreremos às Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os Cursos de Matemática (CNE/CSE/MEC 1.302/ 2001), aprovada em 06 de novembro de 2001 pelo colegiado da Câmara de Educação Superior do Conselho Nacional de Educação, e às Diretrizes para a formação de professores para a Educação Básica (RESOLUÇÃO CNE/CP Nº 1, de 18 de Fevereiro de 2002).

Tais Diretrizes têm força de lei e regulam a elaboração, reconhecimento e avaliação dos cursos criados na área de Licenciatura em Matemática, em todo o Brasil, sejam eles da rede pública ou privada de ensino superior. Cabe às Instituições de ensino desse nível de escolaridade, elaborar Resoluções específicas complementares, que atendam suas particularidades, desde que estas não entrem em desacordo com as Diretrizes.

De acordo com as DCN, os conteúdos básicos comuns a todos os cursos de Licenciatura em Matemática são:

- Cálculo Diferencial e Integral;
- Álgebra Linear;
- Fundamentos de Análise;

- Fundamentos de Álgebra;
- Fundamentos de Geometria e
- Geometria Analítica.

Nas ementas das disciplinas relativas a esses conteúdos, deverão ser abordados tópicos da Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise.

Focando nossa discussão no Cálculo Diferencial e Integral, defendemos como sendo fundamental o uso da História da Matemática como forma de estabelecer elos entre os conteúdos estudados na disciplina, na Graduação, com conteúdos do Ensino Básico que serão lecionados pelos futuros professores.

Dentre as características do licenciado em Matemática que são estabelecidas pelas DCN, destacamos que ele deve ter a

visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

Dessa forma, o educador em Matemática precisa procurar meios de tornar a disciplina mais agradável e interessante, proporcionando aos alunos uma forma estimulante de aprender. Ainda com o auxílio da História da Matemática é possível a construção de uma das competências e habilidades que são delimitadas pelas DCN para o licenciado em Matemática:

desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

Nessa perspectiva, a História da Matemática pode, se usada de maneira adequada, auxiliar tanto aos alunos quanto aos professores na ampliação dos seus conhecimentos matemáticos, além de possibilitar a atribuição de significado àquilo que se aprende.

Observando-se o Artigo 3º da Resolução CNE/CP Nº 1, de 18 de fevereiro de 2002, que trata da formação de professores que atuarão nas diferentes etapas e

modalidades da Educação Básica, vale ressaltar que deve haver coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor, concebendo-se a aprendizagem como processo de construção de conhecimentos e não como o acúmulo de informações sem significado ou utilidade.

Trata-se de garantir a formação de habilidades e valores em conexão com a realidade na qual o indivíduo se encontra inserido, em estreita ligação com os outros, colocando-se em uso capacidades pessoais e os conhecimentos por ele desenvolvidos, como meio e como base para a construção de novas competências.

Assim, apresentamos em nosso trabalho, uma visão da importância que deve ser dada aos conteúdos ministrados nas aulas de Cálculo, em especial quando os alunos são do curso de Licenciatura, pois estes deverão, além de compreender o conteúdo com o rigor lógico-matemático necessário, também conseguir estabelecer um elo entre o que está aprendendo e possíveis conteúdos que serão ministrados por eles na Educação Básica, ou mesmo no Ensino Superior, buscando na História da Matemática fundamentos que possibilitem tornar o assunto abordado mais agradável e compreensível.

1.5 NOSSA METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Nosso estudo, em razão da natureza dos objetivos que delimitamos, compreende uma investigação de natureza predominantemente qualitativa, do tipo exploratório, entendendo que, apesar do recorte feito em nossa discussão, os resultados podem servir como base de reflexão para outras investigações de mesma natureza.

Como instrumentos para o levantamento dos elementos sobre os quais realizamos nossa reflexão, lançamos mão de: livros de História da Matemática; livros didáticos de Matemática; aplicativos de Matemática; e aplicação de questionários para alunos e professores da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de nossa instituição.

1.6 A ESTRUTURA DE NOSSO TRABALHO

Nosso trabalho é composto de três Capítulos, contendo o primeiro deles uma breve justificativa de nosso tema de investigação; a apresentação de nossa questão central e nossos objetivos; e da Metodologia que adotamos no percurso.

O Capítulo 2 contém uma breve discussão acerca do uso da História da Matemática no ensino da Disciplina e um recorte teórico acerca da História do Cálculo Diferencial e Integral.

No terceiro Capítulo trazemos os elementos de nossa reflexão acerca da conexão entre os elementos históricos presentes no Capítulo anterior e conteúdos de Matemática do Ensino Básico, além da apresentação de aplicativo envolvendo o mesmo tema.

Por fim, apresentamos nossas Considerações Finais, onde sintetizamos nossas discussões e apontamos possíveis estudos futuros dentro da mesma perspectiva.

2. RECORTE TEÓRICO SOBRE NOSSO TEMA DE INVESTIGAÇÃO

2.1. AS CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

No estudo da origem de um conceito ou campo de conhecimento matemático, podemos perceber a construção e a evolução das teorias, o que nos leva à reflexão acerca da complexidade do desenvolvimento do conhecimento, fazendo com que nós tenhamos um novo posicionamento acerca daquilo que aprendemos, além de contribuir para a melhoria da nossa prática pedagógica em sala de aula.

Com base nesse novo posicionamento, o professor pode planejar sua prática de modo a estimular o interesse dos alunos pelo conteúdo abordado, tornando a disciplina interessante o suficiente para que os alunos a estudem com prazer e construam conhecimento de modo significativo, ou seja, de modo a entender seu papel no corpo teórico e como aplicá-lo de modo pertinente.

Muitos são os caminhos metodológicos propostos com esse objetivo e, em nosso caso, na busca de estratégias que possam estimular o interesse do aluno pela apreensão de conceitos matemáticos, optamos por analisar o papel da História da Matemática (HM).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) (BRASIL, 1998, p.42), a História da Matemática pode dar uma grande contribuição ao ensino da disciplina,

ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Com o destaque dado nos PCN à História da Matemática como recurso metodológico, a própria História da Matemática passou a assumir uma importância

cada vez maior no processo de ensino-aprendizagem, apesar ainda de contar com limitações, seja ela usada como fonte de pesquisa científica ou como um facilitador do ensino de conteúdos nas aulas da disciplina.

As limitações identificadas dizem respeito à lacunas na formação docente inicial ou à falta de recursos didáticos com essa orientação e que possam servir como fonte de pesquisa para a prática de professores da Educação Básica.

Em especial na Matemática, o professor deveria se apropriar da história do desenvolvimento dessa ciência, em razão do quanto pode aprender acerca dos aspectos culturais e sociais desse campo de conhecimento, levando-o a enxergá-lo como uma área em permanente processo de transformação e fruto de uma construção social, cultural e temporal.

Sendo assim, defendemos que a História da Matemática deve fazer parte da formação dos professores, sendo explorada desde o seu ingresso na Universidade, onde irá solidificar a construção de seu conhecimento, e não tendo limites para seu fim, pois a formação do professor deve continuar e ultrapassar os limites da Universidade e do espaço de tempo compreendido por sua formação inicial.

Como afirma Ponte (2000),

a formação de um professor está longe de acabar na formação inicial, sendo esta, no entanto, uma etapa fundamental porque perspectiva e orienta muito do percurso posterior. Tal só será possível se a formação inicial do professor for suportada por uma sólida formação ética, cultural, pessoal e social. (PONTE, 2000, p. 13).

O professor deve ser capaz de conhecer e dominar os conteúdos formais da disciplina que irá lecionar, além de saber interligar a disciplina com outros campos de conhecimentos. E, mais uma vez, a História da Matemática certamente poderá contribuir, pois, por meio dela, os professores podem aprofundar suas reflexões e ir além do que está escrito nos manuais didáticos, procurando sentido naquilo que ensina.

O professor precisa, porém, enxergar a História da Matemática como um fator contribuinte para o ensino da Matemática, entendendo que seus elementos não constituem um assunto novo a ser trabalhado em sala de aula, ampliando ainda

mais um já inchado currículo escolar, mas uma maneira de tornar as aulas mais significativas e atraentes para o aluno.

Ou seja, o uso de elementos da História da Matemática pode fazer com que o aluno atribua significado à disciplina e, conseqüentemente, seja um ser pensante e criativo, além de estabelecer uma ligação dos conteúdos matemáticos com demandas vivenciadas em seu cotidiano. De acordo com Viana & Silva (2007),

[...] O conhecimento da HM possibilita perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização. [...] (VIANA & SILVA, 2007, p.6)

Dentre tantas outras contribuições que podem ser dadas para o ensino da Matemática por meio do uso da História da Matemática, podemos destacar as seguintes:

- estimula a curiosidade do aluno e o motiva;
- ajuda a mudar concepções a respeito da natureza da Matemática;
- auxilia na compreensão da noção de rigor matemático e da dimensão estética da Matemática;
- ajuda a compreender como o conhecimento escolar está organizado.

Considerando esses possíveis benefícios, não podemos deixar de refletir sobre as vantagens que o uso da História da Matemática poderá trazer para a melhoria do ensino-aprendizagem da Matemática.

Assim, em especial para os licenciandos, os conteúdos das disciplinas de conteúdo específico da Graduação em Matemática deveriam ser abordados de forma diferenciada, explorando, como motivação, recursos da História da Matemática, fazendo com que os futuros professores tivessem uma visão diferente do assunto e, conseqüentemente, soubessem valorizá-lo e conectá-lo com a Matemática que irão lecionar no Ensino Básico.

Isso será fundamental para que os egressos desse Curso tenham a capacidade de desenvolver em seus futuros alunos o senso crítico, percebendo a Matemática como um espaço de criação e reflexão, atribuindo aos conteúdos dessa

área de conhecimento um maior significado e proporcionando o estabelecimento de ligação da Matemática com outras áreas de conhecimento.

Reconhecendo o papel do licenciado que atua na Educação Básica ou no Ensino Superior ou dos bacharéis que atuam como professores, é na História da Matemática que buscamos tal significação.

Assim sendo, tentaremos apresentar aqui uma visão da importância que deve ser dada ao ensino de Cálculo, em especial para alunos do curso de Licenciatura, pois estes deverão, além de compreender o conteúdo com o rigor lógico-matemático necessário, também conseguir estabelecer um elo com os possíveis assuntos que serão ministrados por eles no Ensino Básico ou em outras disciplinas do Ensino Superior, buscando métodos que tornem o conteúdo mais significativo.

Nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral da UFPB, como em muitas outras instituições de ensino superior do país, é grande a evasão e o abandono e, reconhecendo esse problema, buscamos em nosso trabalho refletir sobre possibilidades de contribuição para sua minimização, tomando como foco a necessidade de formação dos alunos da Licenciatura do Curso de Graduação em Matemática. Acreditamos que a História da Matemática pode ser um recurso para tornar o ensino do Cálculo mais significativo, iniciando, para nossa reflexão, com uma breve retrospectiva da construção histórica do Cálculo.

2.2 A HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Para o desenvolvimento desta seção buscamos como fonte teórica os textos do Professor Luiz Adauto Medeiros intitulados “Aspectos do Teorema Fundamental do Cálculo”, publicado no ano de 2008, e “Centenário da Integral de Lebesgue”, publicado em 2002. Utilizamos também um artigo disponível no site da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, que tem como autores GUEDIN, Juliana; UGGIONI, Edison, intitulado “Cálculo diferencial e integral: o ensino como uma abordagem histórica e suas contextualizações”, publicado em 2004.

Inicialmente, devemos nos situar em um contexto histórico do surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, analisando as ideias dos principais teóricos que contribuíram para o seu desenvolvimento e os contextos em que eles estavam

inseridos, estabelecendo um elo entre o desenvolvimento da teoria do Cálculo e as necessidades da época.

O Cálculo Diferencial e Integral, também conhecido como cálculo infinitesimal, é um ramo importante da Matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria. Trata da variação de grandezas, como a inclinação de uma reta, e de quantidades que mudam, tendendo a outras quantidades.

Ao falarmos na origem do Cálculo Diferencial e Integral, os primeiros nomes que surgem são Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), os quais desenvolveram as ideias do cálculo há cerca de 300 anos. Como contribuições desses dois nomes citados, temos a derivada e a integral, que são duas noções básicas do Cálculo.

A ideia geométrica da derivada está ligada ao problema de traçar a tangente a uma dada curva e a ideia de integral relacionada com o problema de encontrar a área de figuras planas. Vale ressaltar que tanto em relação à derivada quanto à integral, existem outras ideias possíveis de serem associadas.

Um dos primeiros problemas que aparecem na história, relacionados com a ideia de integral, são os problemas de quadratura. Esses problemas consistiam em encontrar a área de determinadas figuras através da medição de superfícies como, por exemplo, tomar o quadrado, por ser uma figura simples, e tentar igualar sua área à área de uma outra figura diferente.

As quadraturas que mais fascinavam os geômetras da antiguidade eram as que possuíam formato curvilíneo, a exemplo do círculo. As primeiras quadraturas da história foram realizadas por Hipócrates (440 a. C.), que estudou as lúnulas, figuras também conhecidas como meia-lua.

Desse método, surgiu a questão, posta por um matemático da época, de encontrar a quadratura de um círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos. Contudo, surgiu um problema, pois esta sequência nunca chegaria a um fim e, desse procedimento surgiu o Método de Exaustão. Esse método, apesar de já ser usado na Grécia Antiga e ser atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.), teve seu desenvolvimento e aperfeiçoamento dado pelo considerado maior matemático da antiguidade e um dos três maiores de todos os tempos: Arquimedes.

2.3 O MÉTODO DE EXAUSTÃO E A QUADRATURA DO CÍRCULO E DA PARÁBOLA

O método de Exaustão consiste em “exaurir” uma figura dada por meio de áreas e volumes já conhecidos. Um exemplo, o mais conhecido em relação a esse método, é o problema da quadratura do círculo, que pode ser resumido na seguinte questão: *como obter um quadrado com a mesma área de um círculo dado de raio r ?*

O método de exaustão proposto por Arquimedes possuía uma característica que não era conveniente, pois para cada caso teríamos que adotar um tipo particular de aproximação. Arquimedes deu outras e importantes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, ao determinar a área da região limitada por uma parábola e uma reta através da soma das áreas de infinitos triângulos, e com o fato de ter conseguido provar rigorosamente o resultado da soma com infinitos termos, marcou na história a primeira vez que se realizavam cálculos dessa natureza.

A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas, lembrando que a intenção à época não era encontrar um valor numérico para essa grandeza, mas determinar uma figura conhecida com o mesmo comprimento, área ou volume de uma figura dada inicialmente.

Os antigos geômetras gregos tentavam medir a área de determinadas superfícies planas, tentando relacioná-la com a área do quadrado, por esta ser a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse a área igual a da figura em questão. As quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, e as figuras limitadas por arcos de outras curvas. Iremos agora detalhar um pouco mais esse método.

O percussor de tal ideia foi Hipócrates de Chios, que estudou as lúnulas. Nas tentativas de quadrar o círculo, Hipócrates pôde achar as áreas de certas lúnulas, figuras que são compostas pela intersecção de duas circunferências, usando o seu teorema que a relação das áreas de dois círculos está igual à relação dos quadrados de seus diâmetros. Na figura 1, as lúnulas compreendem as duas regiões em vermelho.

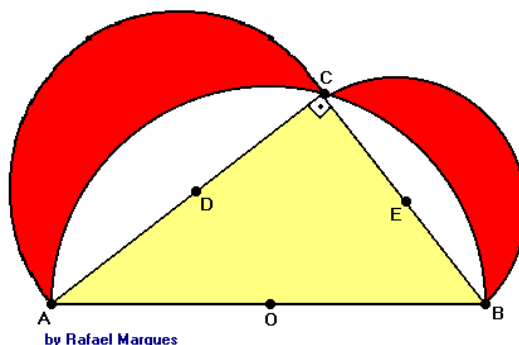


Figura 1: lúnulas de Hipócrates
 Fonte: <http://www.paulomarques.com.br/arg13-13.htm>

Hipócrates mostrou que um cubo pode ter seu volume dobrado se puderem ser definidas duas proporções entre o número que representa as medidas de suas arestas e seu dobro, o que exerceu grande influência nas tentativas de duplicação do volume do cubo.

Antifon, por volta de 430 a.C., tentou encontrar a quadratura do círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares nele inscritos. Primeiro inscreveu no círculo um quadrado; depois inscreveu um octógono; em seguida um hexadecágono, e assim por diante. No entanto, havia um problema: tal sequência nunca teria fim, pois é possível construir um polígono com qualquer número de lados que se queira. Apesar disso, esta ideia brilhante deu origem ao *Método de Exaustão* que, como já citamos antes, consiste em esgotar a área ou volume de uma figura dada, por meio de outras áreas e volumes conhecidos.

Esse método é atribuído a Eudoxo (406 – 355 a.C), embora deva grande parte do seu desenvolvimento a Arquimedes, que determinou que uma primeira aproximação para a área do círculo era dada pela área do quadrado nele inscrito. Se acrescentarmos ao quadrado quatro triângulos isósceles convenientes, obtemos um octógono regular inscrito no círculo, cuja área fornece uma aproximação melhor para a área do círculo do que a aproximação obtida com a inscrição do quadrado. Se prosseguirmos com esse procedimento, a relação entre as áreas das duas figuras, ou seja, do círculo e da figura nele inscrita, será cada vez mais próxima. (Figura 2).

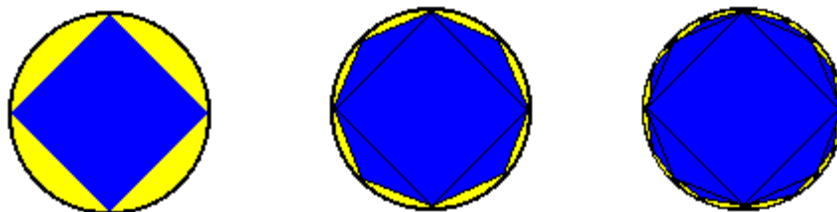


Figura 2: Aproximações para a área do círculo.

Fonte: <http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000026/00002603.pdf>

Repetindo indefinidamente esse processo, é possível observar que do ponto de vista geométrico teremos a impressão de termos esgotado a área do círculo, ou seja, de tê-la preenchido totalmente, embora tenhamos certeza que ainda existem regiões do círculo que não foram cobertas, mesmo que muito pequenas e quase imperceptíveis ao olho humano. Mas continuando o processo, conseguimos aproximar cada vez mais a área do círculo à área de polígonos inscritos com 2^n lados.

As quadraturas mais famosas são a *quadratura do círculo* e da *Parábola*, ambas tendo como elaborador fundamental o matemático Arquimedes. Para descrever a prova dessas quadraturas utilizamos como referências o livro do Paulo Roberto Martins Contador- Matemática, uma breve história, e o texto do Mauro Lopes Alvarenga, com o título “O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático”.

Inicialmente, iremos descrever a quadratura do círculo. Este é um problema no qual se busca encontrar um quadrado que tenha a área igual a de um círculo dado. Tal problema fascinou por muito tempo o homem e em 1.800 a.C. os egípcios acreditaram em ter encontrado a solução do problema, considerando a medida do lado do quadrado igual a $\frac{8}{9}$ da medida do diâmetro do círculo dado.

Esse resultado encontra-se no *Papiro de Rhind* e trataremos dele com mais detalhes no próximo Capítulo. Diversos matemáticos encantaram-se pelo problema, mas iremos direcionar, nesse momento, nossos olhares para a proposta exposta pelo matemático Arquimedes. Ele argumentava sobre a possibilidade de existir um triângulo retângulo cuja área fosse igual à de um círculo dado.

Para Arquimedes, a área de um círculo qualquer poderia ser dada pela área de um triângulo retângulo de lados a , b e c , onde r é o raio do círculo e P_c é seu perímetro. Como sabemos, a área S_t do triângulo retângulo, é igual à metade do

produto dos catetos a e b , ou seja, $S_t = ab/2$. Para os Gregos, esse problema não poderia ser resolvido, pois a relação entre perímetro e área resultava em um número irracional. Sendo assim, Arquimedes usou os seguintes fatos para convencê-los de que sua proposição estava correta: considere a área S_t do triângulo retângulo como sendo $S_t = (p_c \cdot r)/2$ e a área do círculo como sendo S_c . Por hipótese, suponhamos que a área do triângulo retângulo seja menor do que a área do círculo, ou seja, $S_c > S_t$.

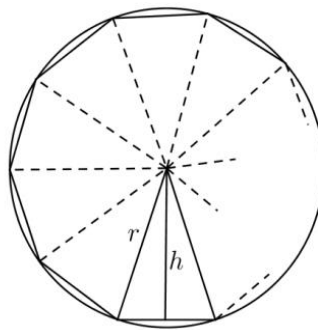


Figura 3: Divisão do círculo em setores

No círculo de raio r inscrevemos um polígono de n lados. Percebe-se então que, na medida em que o número de lados do polígono aumenta, mais a sua área S_p aproxima-se da área do círculo, S_c , mas esta continuará sendo maior, ou seja, $S_c > S_p$. Em razão do grande número de lados do polígono inscrito, podemos dizer que sua área é praticamente igual à área do círculo, de onde podemos dizer que a área do polígono é maior do que a área do triângulo, $S_c < S_p$.

Vale notar que partimos da hipótese de que $S_c > S_t$ e, daí, temos: $S_c > S_p > S_t$ e $S_c - S_p = K$, onde $K_1 < K$. A área S_p do polígono de perímetro P_n é a soma das áreas de n triângulos retângulos de altura h e hipotenusa r . Se fizermos um corte do polígono, como se fosse uma laranja, cortando bem ao meio esta série de triângulos, e encaixando as duas metades, conseguimos o retângulo de lados h e $P_p/2$ (Figura 4).

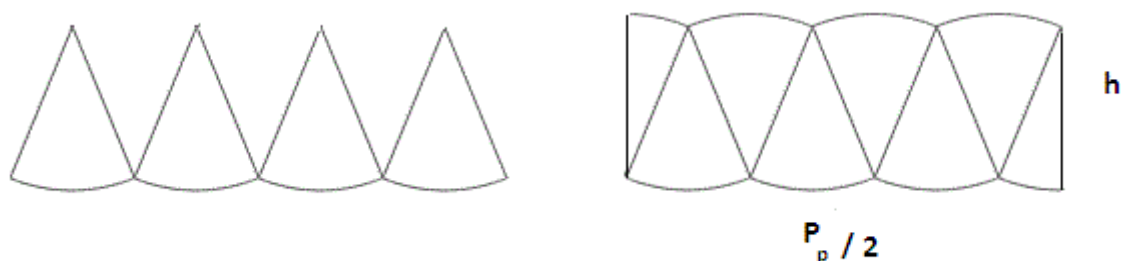


Figura 4: Recorte dos setores

A área do polígono será dada exatamente pela área do retângulo acima, $S_p = (P_p \cdot h) / 2$. Comparando r e h , vemos que r sempre atinge a circunferência do círculo e h atinge apenas o lado do polígono, portanto, $r > h$. Temos também que o perímetro do círculo é maior que o perímetro do polígono, ou seja, $P_c > P_p$. Temos ainda que a área do polígono é menor que a área do triângulo, $S_p < S_t$.

Vale ressaltar que antes havíamos concluído que $S_p > S_t$, ou seja, chegamos a uma contradição. Assim sendo, concluímos que nossa hipótese não é verdadeira, ou seja, a área do triângulo de Arquimedes não pode ser menor que a área do círculo.

Por outro lado, se consideramos um polígono de n lados, circunscrito, e partimos da ideia de que a área do círculo é menor que a área do polígono, e procedendo de forma análoga ao caso anterior, vemos que chegamos novamente a uma contradição. Ou seja, concluímos que a área do polígono não pode ser nem maior, nem menor do que a área do círculo. Portanto, elas só podem ser iguais.

Como afirmamos anteriormente, outro problema bem conhecido é o problema da quadratura da Parábola. Arquimedes conseguiu fazer uma demonstração matemática formal de que a área A de um segmento parabólico é dada por $\frac{4}{3}$ da área T de um triângulo, tendo este triângulo a mesma base e a mesma altura do segmento parabólico considerado.

Para demonstrar seu resultado, Arquimedes utilizou o método da exaustão. Para começar, ele inscreveu no segmento parabólico considerado, um triângulo com base e altura de mesmas medidas que as do segmento parabólico. Depois inscreveu

um novo triângulo em cada um dos segmentos parabólicos resultantes, repetindo o processo de inscrição de triângulos nos segmentos parabólicos resultantes da etapa anterior.

Em seguida provou que para cada triângulo dado, os dois triângulos construídos sobre seus lados têm uma área total igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo dado. Dessa forma, ele exauriu o segmento parabólico, removendo sucessivamente esses triângulos inscritos.

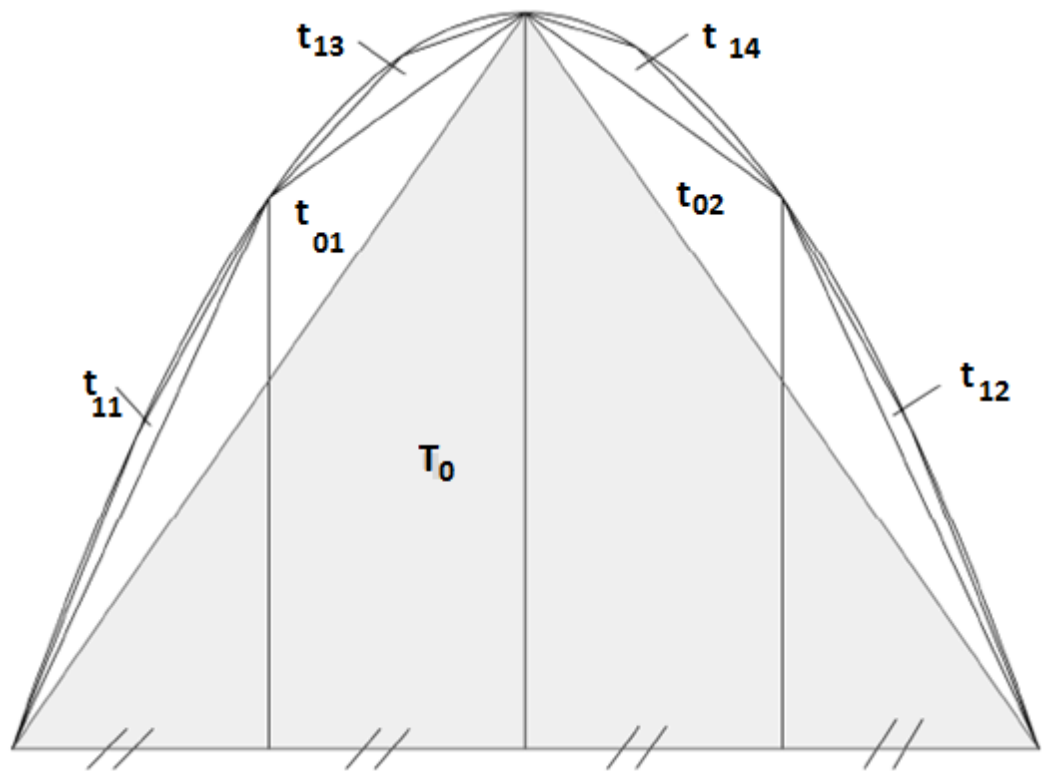
A área total pode ser, então, aproximada por uma soma de áreas que, organizadas juntas de modo adequado, geram uma progressão geométrica em que cada termo, com exceção do primeiro, que é igual a $\frac{1}{4}$ do termo anterior. A soma de tal progressão geométrica é igual a $\frac{4}{3}$ do primeiro termo.

Arquimedes provou que a área do segmento parabólico não pode ser maior que $\frac{4}{3}$ da área do primeiro triângulo inscrito e, da mesma forma, que não pode ser menor que esse mesmo valor.

Em outras palavras, podemos dizer que Arquimedes inscreve sucessivos triângulos no segmento de parábola; calcula a área desses triângulos e vai obtendo valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos. Assim, demonstra que a área do segmento de parábola é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo com a mesma base e altura do segmento.

No entanto, Arquimedes não prolonga as somas até o infinito. Ele deduz o seu valor demonstrando que não pode ser nem maior, nem menor que esses $\frac{4}{3}$. Ou seja, nomeando as partes resultantes do processo de quadratura da parábola temos: seja P o segmento de parábola e T_0 o triângulo inscrito (ver figura 5); nos dois segmentos restantes são escritos outros dois triângulos, t_{01} e t_{02} , de mesma base e altura. Seja a soma destes T_1 . Nos quatro segmentos de parábola formados são inscritos os triângulos t_{11} , t_{12} , t_{13} , e t_{14} , cuja soma é T_2 .

Precisamos mostrar que a relação $T_1 = \frac{T_0}{4}$, $T_2 = \frac{T_1}{4}$ é satisfeita, com base nas propriedades da parábola, e assim por diante, isto é, os “pedaços” que são acrescentados ao triângulo não só se tornam cada vez menores, mas cada um é igual a $\frac{1}{4}$ do anterior.



Fonte: O método de exaustão e a sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Se fizermos algumas rotações e translações adequadas, podemos supor que qualquer parábola assume a forma $y = ax^2$, com $a > 0$. Suponhamos que a reta $y = b$, $b > 0$ limita o segmento parabólico. Nossa pretensão é mostrar que $T_1 = T_0/4$ (de forma análoga é feita para os outros triângulos). Da figura 6 segue que a área do triângulo é dada por $T_0 = \frac{2b\sqrt{b/a}}{2} = b\sqrt{b/a}$. Em D , temos $x = \frac{1}{2}\sqrt{b/a}$ e $y = (\frac{1}{2}\sqrt{b/a})^2$, ou $y = b/4$. Daí, $D = (\frac{1}{2}\sqrt{b/a}, b/4)$. A reta r que passa pelos pontos A (origem) e C é da forma $r : y = mx$, onde $m = \frac{b}{\sqrt{b/a}} = \frac{b}{\sqrt{b}}\sqrt{a} = \sqrt{ab}$.

Assim, $r: y = \sqrt{ab} x$.

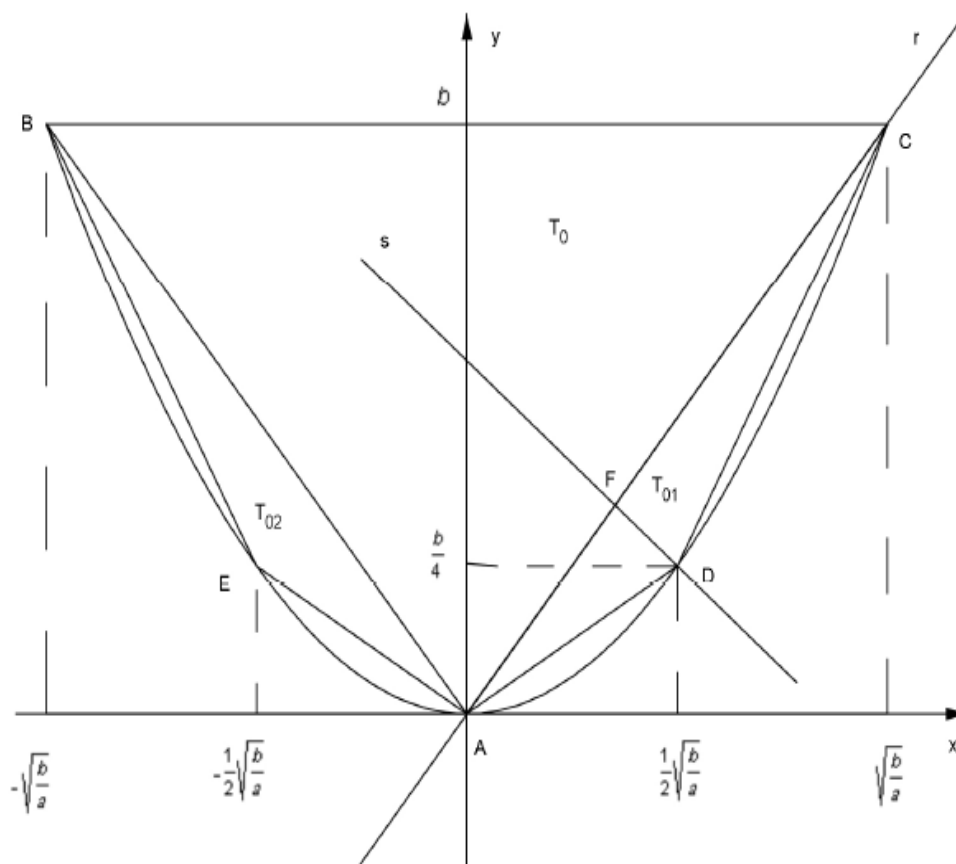


Figura 6

Fonte: O método de exaustão e a sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Consideremos a reta s perpendicular a reta r passando por D . Temos que $s: y = -\frac{1}{m}x + k$, ou seja, $s: y = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + k$. Como D é ponto da reta, segue que $\frac{b}{4} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{ab}} + k$, donde segue que $k = \frac{2+ab}{4a}$. Assim, $s: y = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a}$. O ponto F é a interseção das retas r e s . Isto significa que $\sqrt{ab} = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a}$. Agora,

$$y = \sqrt{ab}x = \sqrt{ab} \left[\frac{(2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a(1+ab)} \right]. \text{ Daí temos que } F = \left(\frac{(2+ab) \cdot \sqrt{ab}}{4a(1+ab)}, \frac{b(2+ab)}{4(1+ab)} \right).$$

Para calcular a área do triângulo t_{01} temos que achar a sua altura h , que é a distância do ponto D a F . Tomando $h = d(D, F)$ chegamos através de cálculos

simples que $h = \frac{b}{4\sqrt{1+ab}}$. A base do mesmo triângulo é dada pela distância de A até C, ou seja, $d(A,C) = \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}}$. Assim, a área do triângulo t_{01} é: $A_{t_{01}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}} \cdot \frac{b}{4\sqrt{1+ab}}$. Daí, a área dos triângulos t_{01} e t_{02} somadas é T_1 , onde $T_1 = \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}} \cdot \frac{b}{4\sqrt{1+ab}} = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{b}{a}} = T_0/4$. O processo é análogo para provar os demais casos.

Voltando ao cálculo da área do segmento parabólico, perceba que o polígono construído (ver figura 5) aproxima-se efetivamente do segmento da parábola e que $T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots = \frac{4}{3} T_0$, ou ainda, $T_0 + \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{4^2} + \dots + \frac{T_0}{4^n} + \dots \rightarrow \frac{4}{3} T_0$.

No formalismo atual, pensando em repetir o processo infinitamente, teríamos $T_0 \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right] = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = T_0 \frac{4}{3}$, pois a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ de razão $1/4$ converge para $4/3$. Note que mesmo não pensando no infinito, Arquimedes encontrou a soma exata da série. Foi a primeira vez que se calculou soma com infinitos termos.

O que permitiu a passagem do método de exaustão para o conceito de integral foi a percepção que em certos casos, a área da região pode ser calculada sempre com o mesmo tipo de aproximação por retângulos (Figura 7), o que não se tinha com as aproximações que eram feitas por Arquimedes, onde para cada caso teríamos uma aproximação adequada, tornando o método inconveniente.

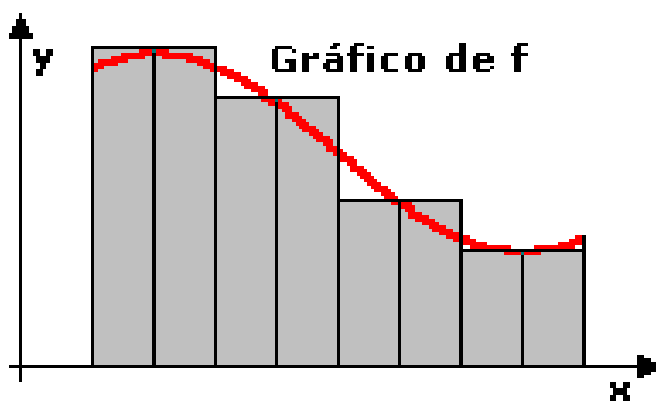


Figura 7

Fonte: <http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000026/00002603.pdf>

Apesar de esta descoberta ter sido de fundamental importância, a criação mais importante, na prática, foi a possibilidade de conseguir expressar as integrais através de uma função denominada de primitiva, o que facilitava o trabalho dos matemáticos, já que o cálculo das integrais pela definição, por ser esta muito abstrata, era muito complicado.

Tal associação, entre a integral e sua primitiva, é estabelecida pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que teve como seus maiores contribuidores Newton e Leibniz. Como já afirmamos, a criação do Cálculo Diferencial e Integral deve-se a Newton e a Leibniz, trabalhando os dois separadamente, mas chegando a resultados semelhantes.

Eles sistematizaram as ideias e métodos surgidos, principalmente, ao longo dos séculos XVI e XVII, tendo como base a percepção de que a área de uma região, em certos casos, pode ser encontrada fazendo o mesmo tipo de aproximação por retângulos, possibilitando a passagem da ideia presente no método de exaustão ao conceito de integral.

O Teorema Fundamental do Cálculo tem a seguinte estrutura:

Teorema: *Seja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, derivável, com derivada $f': [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua. Então vale:*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Esse teorema foi um facilitador para o cálculo de integrais, além de possibilitar uma ligação da ideia de integral com a ideia de derivada. Na mesma época que o teorema destacado, muitos outros métodos também foram desenvolvidos, a exemplo deles podemos citar o procedimento matemático para a integração de todas as funções racionais, também chamado hoje de método das frações parciais, o qual foi desenvolvido por Johann Bernoulli.

Contudo, poucos desses métodos desenvolvidos possuíam um rigor matemático. Foi apenas por volta de 1820 que o matemático Augustin Louis Cauchy (1789-1857) tentou fazer uma conceituação formal das ideias postas por Leibniz e Newton relativas à ideia de integral, formalizando a definição de limite. Infelizmente,

Cauchy não obteve êxito em todas as suas tentativas, o que não compromete seu importante papel no desenvolvimento da Matemática.

Tempos depois, fazendo uma extensão do método de Cauchy, o alemão Bernhard Riemann (1826- 1866) realizou estudos mais aprofundados sobre a integral. Eis o motivo da integral estudada por ele ser chamada Integral de Riemann. Outros matemáticos também contribuíram para o desenvolvimento das Integrais, como podemos citar nomes como Darboux, Lebesgue e Heinstock, os quais partiram da integral de Riemann e chegaram a conceitos ainda mais abstratos da Integral, contribuindo ainda mais para o cálculo.

2.4 O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Na busca de entender melhor os pontos que dificultam o processo de ensino-aprendizagem do aluno do curso de Cálculo Diferencial e Integral I, no ensino superior, aplicamos um questionário com questões abertas a um total de 36 alunos de duas turmas da disciplina, sendo uma de seis créditos e uma de quatro créditos, ao final do período 2011.2.

Nessas turmas havia alunos matriculados dos cursos de Engenharia Química, Física, Química Industrial, Estatística e Ciência da Computação. O questionário continha 6 (seis) questões, as quais iremos, agora, fazer a análise. Nossa pretensão era aplicar em uma turma de alunos do curso de matemática, em particular do curso de Licenciatura, porém isso não foi possível devido ao fato que as turmas são de cursos variados. Contudo, mesmo com esse impedimento, conseguimos alcançar o objetivo pretendido com a pesquisa.

A primeira questão estava relacionada à identificação das dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da disciplina, na concepção dos alunos que a cursaram. Dos alunos que participaram da investigação, 19 (dezenove) deles citaram que a maior dificuldade é gerada por sua falta de base matemática, que é fruto de um ensino médio “problemático”, de acordo com o texto de alguns.

Cinco alunos se referiram à questão da linguagem utilizada pelo professor em sala de aula, muitas vezes prevalecendo a linguagem técnica da Matemática,

sem haver preocupação com o entendimento do aluno quanto ao uso daquela simbologia.

Outros cinco alunos citaram a metodologia utilizada pelos professores em sala de aula como justificativa para as dificuldades existentes, informando que os mesmos não incentivam os alunos a estudar, ministrando uma aula monótona e sem ligação com o mundo real.

Tivemos ainda 4 (quatro) alunos que alegaram como dificuldade a própria falta de interesse dos alunos, que não reservam tempo para o estudo da disciplina, nem se dedicam o suficiente gerando, assim, uma grande reprovação na disciplina. Os outros três alunos que responderam a questão responderam que não têm dificuldades, mencionando que basta estudar para evitá-las.

Na segunda questão, tratamos da importância da disciplina para o seu curso e, conseqüentemente, para sua futura profissão. A maioria dos alunos respondeu que os conteúdos do Cálculo iriam auxiliá-los diretamente no seu curso, ajudando-os a seguir em frente nas outras disciplinas. Destacamos a fala de dois alunos:

“Como eu faço o curso de Engenharia Química as matérias de cálculo são prioridades para se manter no curso, pois tudo que a nossa profissão irá exercer está relacionada ao cálculo.”

“Ele pode me ajudar a fazer programas de computador que possam ajudar outros alunos de Cálculo.”

Analisando a terceira questão, que tratava do conhecimento da origem do Cálculo, ou seja, se eles a conheciam ou não, constatamos o seguinte fato: apenas 7 (sete) alunos, dos 36 pesquisados, afirmaram ser importante conhecer essas origens, mesmo não tendo conhecimento delas. Os demais disseram não se importar muito com esse aspecto.

Um aluno fez a seguinte afirmação: “Não, nunca procurei saber. Sei pouco até, se não me engano Newton, com a necessidade de novos modos de calcular, Newton inventou o cálculo que os matemáticos fracionaram para melhor ensinar”.

Compreendemos que a falta de curiosidade em relação à origem histórica e social daquilo que estuda está relacionada à forma como a Matemática é trabalhada em sala de aula durante a Educação Básica, o que termina implicando na forma

como o aluno vê essa ciência, ou seja, como algo pronto e acabado e sem significado para o mundo fora da escola.

Quanto às questões 4 (quatro) e 5 (cinco), que tratavam dos recursos didáticos e das estratégias utilizadas pelos professores em sala de aula, dividimos as respostas em quatro blocos. Dos alunos pesquisados, 12 (doze) citaram giz e quadro; 10 (dez) mencionaram o debate em sala de aula, o que, segundo eles, facilitava a aprendizagem do Cálculo; 12 (doze) se referiram a listas de exercícios e a resolução de questões no quadro, e outros mencionaram elementos pontuais.

Destacamos as seguintes declarações dos alunos entrevistados quanto à metodologia utilizada pelo professor (ambos estudam na mesma turma): “Tenta exemplificar o assunto em coisas materiais e que são mais fáceis de observar no dia-a-dia”; “Fala dos métodos antigos que eles praticavam antigamente até os métodos atuais”.

De acordo com as afirmações destacadas, o professor preocupa-se em explicar e mostrar, fazendo uso da História da Matemática, os métodos antigos utilizados pelo homem antes da criação do Cálculo e relacionar o conteúdo da disciplina com questões do dia-a-dia dos alunos.

A sexta questão, que trata de quais ações deveriam ser implantadas para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem do Cálculo apresentou como pontos mais citados pelos alunos os seguintes:

1. Necessidade de uma abordagem mais dinâmica no ensino de Cálculo;
2. Criação de grupos de estudos;
3. Trabalhar com turmas com número reduzido de alunos, uma vez que atualmente são observadas turmas da Disciplina com mais de 50 alunos, o que dificulta um acompanhamento mais individualizado por parte do professor;
4. Criação de um curso de pré-Cálculo.

Destacamos algumas declarações dos entrevistados, que enfatizam os pontos citados:

“Todos os professores deveriam ter o mesmo volume de aula (...) e se adequar aos cursos, tipo Cálculo I para Engenharia, Cálculo I para Química, só assim nós alunos iríamos ver Cálculo com mais prazer”.

“Professores com Licenciatura, e não com bacharéis, horários disponíveis de monitores para turmas da noite, já que poucos

monitores dão aula à noite, e a maioria dos alunos noturnos trabalham durante o dia e não podem ir as aulas durante o dia. (...)”.

Na segunda declaração destacada percebemos, de modo indireto, o descontentamento do aluno quanto à falta de didática do professor, atribuindo-a ao fato deste ter cursado o Bacharelado, e não a Licenciatura.

Percebe-se, portanto, diante das respostas dadas pelos alunos, que para eles o professor precisa ir além de aulas expositivas, deve motivar seus alunos e deixar suas aulas mais dinâmicas e, nesse sentido, acreditamos que o uso da História da Matemática deveria ganhar espaço nas salas de aula, auxiliando os professores nos diversos assuntos abordados na Matemática, inclusive no Cálculo Diferencial. Em particular, defendemos que deveriam ser estabelecidas ligações daquilo que estudamos nesse nível, com assuntos que são ministrados no Ensino Básico. Tal ligação faz-se necessário principalmente para os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Também realizamos um levantamento de informações com alguns professores da Disciplina, por meio de um questionário aberto que continha 5 (cinco) perguntas. A primeira delas solicitava a identificação das maiores dificuldades que o professor observava no processo ensino-aprendizagem da disciplina, e todos citaram, como ponto principal, a falta de formação dos alunos no Ensino Médio, o que prejudicava sua aprendizagem no Ensino Superior.

Quanto à metodologia utilizada em sala de aula, a maioria afirmou utilizar a forma expositiva, porém destacamos a fala de um deles, que usa outras abordagens:

Atividades em grupos, apresentação de situações-problemas, como: desafio individual, recursos a vídeos, exploração de sites na internet, sendo todas elas permeadas por debates mesmo em sessões essencialmente expositivas.

Na terceira pergunta questionamos se era feita uma exposição da origem do Cálculo, e todos disseram que sim, mesmo que de forma não muito aprofundada.

Faço desse item obrigatório, pois entendo que conhecer as origens do Cálculo é essencial para uma interação significativa, com repercussões positivas no processo de ensino-aprendizagem.

Na terceira pergunta questionamos sobre o uso, ou não, da História da Matemática na apresentação dos conteúdos e novamente destacamos a fala de um dos professores entrevistados, que afirmou que

O uso da HM possibilita a conscientização de que a matemática não é algo pronto e acabado, é obra essencialmente humana e, portanto, intrinsecamente ligada a eventos, pessoas e saberes da sociedade que a criam e usam.

Quando perguntamos quais ações achavam que deveriam ser implantadas para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem do Cálculo, percebemos que as respostas dos professores condizem com algumas das respostas dadas pelos alunos, quando questionados sobre o mesmo ponto.

Enfatizamos, assim, a seguinte resposta dada por um dos professores:

Acho que um curso de pré-Cálculo é muito importante. Outra coisa é não mesclar turmas com vários cursos diferentes, pois, com um curso ou dois cursos no máximo, podemos dar enfoque direcionado. (...) Uma coisa crucial é considerar salas bem estruturadas, bem ventiladas, com quadro e giz de qualidade excelente. Turmas com um número razoável de alunos é também importante, pois pode-se acompanhar mais de perto cada discente.

Ou seja, para o professor da disciplina, a maior fonte de dificuldades está centrada no aluno, o que não deixa de ser pertinente, mas acreditamos que falta uma auto-avaliação mais profunda acerca da prática pedagógica do professor, e dos reflexos dessa prática na aprendizagem dos alunos.

3. A HISTÓRIA DO CÁLCULO E A MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Destacaremos, do recorte histórico que apresentamos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, para ilustrar a discussão sobre a possibilidade de conexões com conteúdos matemáticos da Educação Básica, apenas o método da exaustão e a ideia de quadratura.

3.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: A IDEIA DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, dirigidos para a 5ª a 8ª Séries do Ensino Fundamental, atuais 6º ao 9º Anos, respectivamente, traz como conceitos e fundamentos do campo das Grandezas e Medidas, que deve se dar o “cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas”. (BRASIL, 1998, p.74).

Como objetivos para esse nível de escolaridade, considerando nosso tema de investigação, recomenda-se no documento, em relação à competência métrica, explorar situações de ensino que possam levar o estudante a “obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas)”. (BRASIL, 1998, p.82).

No que trata de conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos nesse nível, relativos ao conceito de área, o documento sugere o trabalho com o

cálculo da área de superfícies planas por meio da composição e decomposição de figuras e por aproximações. Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência). (BRASIL, 1998, p.89).

Nas orientações didáticas para o professor, os PCN destacam o cuidado que é preciso ter quanto ao trabalho com o cálculo da área de figuras planas, evitando-se valorizar a memorização de fórmulas, pois

[a] experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente. Desse modo, o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações. (BRASIL, 1998, p.131).

Deste modo, considerando-se as orientações dos PCN, vale destacar que se o professor precisará desenvolver em sala de aula um trabalho que possibilite a aprendizagem dos alunos, por meio da compreensão, também ele deverá ter domínio do conteúdo que irá ensinar, de modo significativo.

Em nossa discussão ressaltaremos, em particular, o trabalho com o ensino da área do círculo nos Ensinos Fundamental e Médio, do qual trataremos de seguida.

3.2 – O ENSINO DA ÁREA DO CÍRCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Analisando materiais utilizados para o ensino da área do círculo na educação básica, constatamos que no direcionamento dado pelo material didático para o ensino do assunto, predomina a utilização de um número irracional até então pouco conhecido dos alunos, o número Pi (π).

De forma resumida, a área A de um círculo de raio r é apresentada aos alunos como sendo dada pelo produto $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2$, e esta fórmula é exaustivamente praticada na obtenção de valores numéricos de áreas de círculos de raios variados. Na maioria das vezes, o professor se detém apenas ao material bibliográfico adotado na escola, o livro-texto ou apostila, sem buscar outras fontes que possam enriquecer suas aulas.

Porém, como destacado nos PCN, os alunos memorizam as fórmulas e conseguem reproduzi-las ou usá-las quando necessário, logo após o estudo do conteúdo, mas não conseguem estabelecer um significado para tal fórmula, nem resgatá-las algum tempo depois, se preciso.

3.2.1 O CASO DO ENSINO FUNDAMENTAL – PROPOSTA DE TRABALHO EM DANTE (2010)

O autor inicia a abordagem do assunto com um problema com o qual podemos nos deparar no dia-a-dia, estimulando o aluno a resolvê-lo e, a partir daí, apresentam-se diferentes métodos para obtenção do resultado. Iremos focar na segunda situação abordada por ele.

Inicialmente, consideremos um círculo com raio de medida r qualquer. A proposta do autor é tentar obter o valor aproximado da área do círculo, pela área de um quadrado. O primeiro passo feito é inscrever o círculo em um quadrado, tomando a medida do lado do quadrado como sendo $2r$.

Com o auxílio de elementos já discutidos em nosso texto anteriormente, temos que a área da região na qual o círculo está inscrito será dada por $4r^2$. Dessa forma, a área do círculo deverá ser menor do que $4r^2$. Continuando o processo, traça-se um círculo circunscrito a um quadrado, que tem diagonais com medidas iguais a $2r$.

Assim sendo, encontramos que a área da região quadrada é dada por $2r^2$ e que a área do círculo não poderá ser maior do que $2r^2$. Tomando a média aritmética entre os dois valores obtidos, encontramos que a área do círculo está próxima de $3r^2$.

Após isso, o autor segue com dois exemplos que sugerem que o número próximo de 3 que está multiplicando r^2 é o número irracional π e, assim, estabelece a fórmula para o cálculo da área do círculo em função do número π , ou seja, $A = \pi r^2$. Embora de forma simplificada, observa-se que o autor faz uso dos métodos históricos destacados no Capítulo anterior de nosso trabalho, em particular, o método da quadratura de um círculo e o da exaustão.

No exemplo 1 (DANTE, 2010, p.238), *“usando o círculo dividido em setores”*, ele divide um círculo de raio r em um número par de setores circulares que formam uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo, cuja base mede a metade do comprimento da circunferência e com altura de medida igual a r . A área dessa figura, que seria igual à área do círculo, ou seja é dada por $A = (\pi r)r = \pi r^2$.

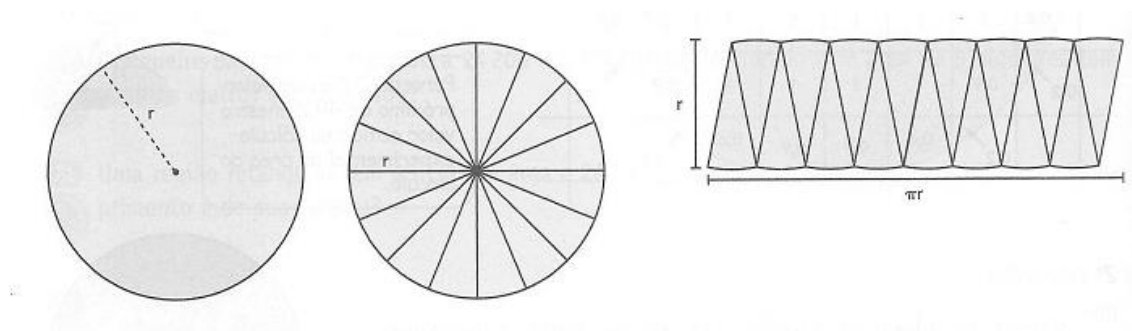


Figura 8

Fonte: (DANTE, 2010, p.238)

Observando a figura 8, copiada da página 238 do livro, concluímos que o autor conseguiu, de forma simples, estabelecer o elo com o que Arquimedes fez ao tentar determinar a quadratura do círculo, o que pode, se trabalhado de maneira adequada, estimular os alunos no estudo do conteúdo.

Outro exemplo interessante, em relação à possibilidade de trabalho com a área do círculo no Ensino Fundamental, diz respeito ao método egípcio para determinação desse valor numérico, descrito em seguida.

3.2.2 – O MÉTODO EGÍPCIO PARA CALCULAR A ÁREA DO CÍRCULO

Atualmente, o conhecimento que temos a respeito da matemática egípcia se encontra reservada em cinco papiros, dos quais iremos buscar maiores fontes no Papiro de Rhind. Este documento foi descoberto por volta do ano de 1850, e é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiro, com cerca de 14cm de largura e 23 cm de altura cada, contendo um total de 87 problemas e suas respectivas soluções.

Focaremos em alguns problemas do Papiro do Rhind, para explicar como os egípcios calculavam a área do círculo. Veremos agora, dois problemas que se encontram no Papiro e que darão a ideia de que estamos tratando.

O problema 48 traz uma comparação da área do círculo com a área do quadrado nele circunscrito. Vale ressaltar que este é o único problema encontrado no Papiro de Rhind que traz solução geométrica (figura 9).

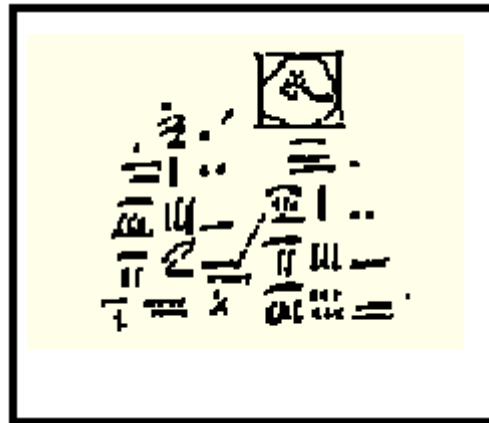


Figura 9

Fonte: Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática.

O problema 50 traz um exemplo de um corpo redondo de diâmetro igual a 9 e pergunta qual é a área do círculo que o compõe (figura 10).

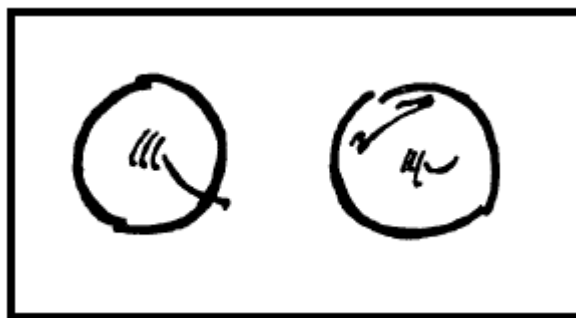


Figura 10

Fonte: Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática.

A solução apresentada pelo escriba para o cálculo da área do círculo, em resumo, é dado da seguinte forma: “Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área”.

De outra forma, podemos dizer que o escriba estava usando a fórmula

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

onde d representa o diâmetro do círculo.

Assim, podemos ainda chegar a uma aproximação do número irracional π :

$$\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \rightarrow \pi = 4 \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 3,160493$$

O erro encontrado por meio desse processo, em relação ao uso da fórmula tradicional para a área do círculo é de apenas 0,0189, ou seja, é de menos de 2%.

Diversas explicações existem para o uso do método egípcio no cálculo da área do círculo, as quais podem ser levadas para abordar tal assunto na sala de aula, com o intuito de facilitar a compreensão dos alunos. Abordaremos apenas duas dessas explicações.

1º Explicação: Na decoração das paredes de suas construções, os egípcios utilizavam malhas quadriculadas. O planejamento da distribuição da decoração era feito com base em um modelo, que recebia a mesma malha quadriculada em uma escala menor. Depois de distribuído o padrão no modelo, cada parte era transportada de forma proporcional para o local correspondente na parede.

Se considerarmos a figura do problema 48 e o fato dos egípcios usarem malhas quadriculadas, veremos que o octógono inscrito no quadrado, como indicado na figura 11, sugere, naturalmente, o desenho de uma malha formada por 9 quadrados de mesmo tamanho. Traçando-se as diagonais de alguns quadrados, como indicado na figura obtém-se um octógono.

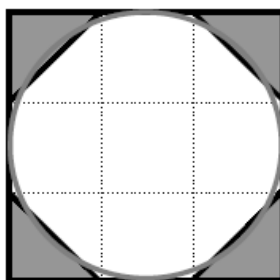


Figura 11

Fonte: Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática.

Na figura resultante da inscrição do círculo no quadrado, existem algumas regiões do octógono que são exteriores ao círculo e algumas do círculo que são exteriores ao octógono. Ao observarmos a figura, temos a impressão de que a área da região exterior do círculo ao octógono é igual à área da região exterior do octógono ao círculo, o que nos leva a concluir que a área do octógono é aproximadamente igual a área do círculo.

Temos que d é o diâmetro do círculo, que é igual ao lado do quadrado e, assim, a área do octógono será dada por:

$$d^2 - 2\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \cong \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia da área do círculo.

2º Explicação: a área do octógono pode ser dada pela área do quadrado menos a área dos quatro triângulos hachurados. Podemos dividir cada um dos quadrados da malha em 9 quadrados menores de mesma área, produzindo assim, uma malha que cobre o quadrado maior contendo 81 quadradinhos menores (figura 12).

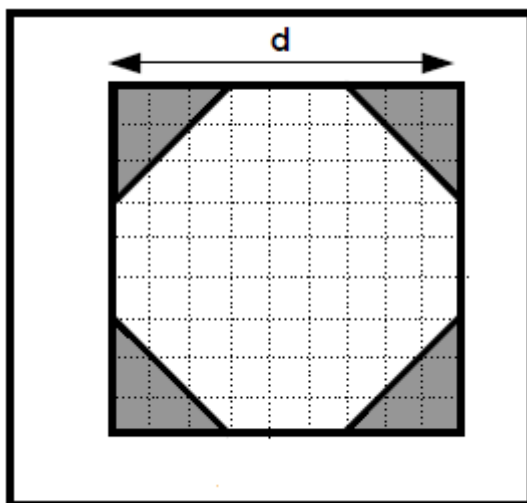


Figura 12

Fonte: Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática.

Podemos ainda reorganizar a parte correspondente a região hachurada de acordo com a figura 13.

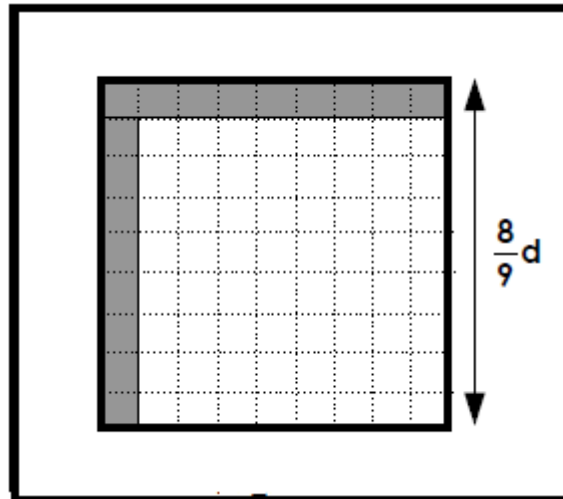


Figura 13

Fonte: Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática.

Note que os dois triângulos hachurados no topo do quadrado, juntos, na figura 12, têm a mesma área do retângulo hachurado no topo do quadrado, da figura 13 e, da mesma forma, os dois triângulos hachurados na base do quadrado juntos, na figura 12, têm a mesma área do retângulo hachurado no lado esquerdo do quadrado, na figura 13.

Logo, a área do octógono pode ser dada como sendo igual à área do quadrado de lado $\left(\frac{8}{9}d\right)$ menos a área de lado $\left(\frac{1}{9}d\right)$ e, assim, mais uma vez chegamos à fórmula egípcia para o cálculo do círculo de diâmetro d . Temos que a área do círculo de diâmetro d é dada por :

$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \left(\frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \frac{1}{81}d^2 \cong \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Observe que em ambas as explicações, a dedução da fórmula independe da medida do diâmetro. Vale lembrar que existem outras explicações sobre o método egípcio, mas que as que destacamos são suficientes para estabelecer conexão com os elementos da história do Cálculo que trouxemos no Capítulo 2 de nosso trabalho.

3.2.3 – ANÁLISE DE APLICATIVO DO MEC

Analizamos um planejamento de aula exposto no Portal do Professor no site do Ministério da Educação e Cultura (MEC), o qual usa como base um software que tem como título “a área do círculo como um limite”, e que visa ajudar o aluno a compreender melhor tal assunto.

O Plano de Aula está disponível no site:

(<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=17717>)

E o software disponível em:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

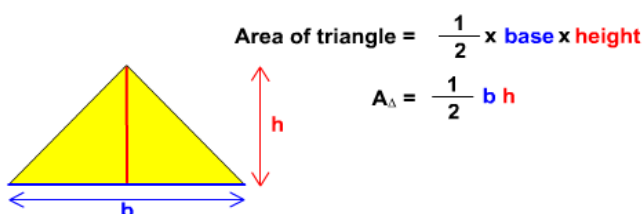
O software é explorado, conforme orientação do Plano de Aula, em sete etapas, que serão expostas em seguida. Vale ressaltar que antes do professor aplicar essa atividade, ele deve estar atento ao nível do conhecimento dos alunos, pois possivelmente será necessária a revisão de alguns conceitos da Geometria.

Uma vez que todos os alunos têm um domínio mínimo dos pré-requisitos necessários, o professor poderá seguir com a aplicação da atividade. Explanaremos o uso do software, através de figuras das diferentes etapas (transcritas diretamente do texto disponível no endereço indicado acima).

1ª Etapa: O professor deve fazer comentários breves sobre os principais elementos de um triângulo: lados, ângulos, como calcular sua área, etc.

Copyright © 2004 David M. Harrison

The Area of a Circle As a Limit



Click to begin:

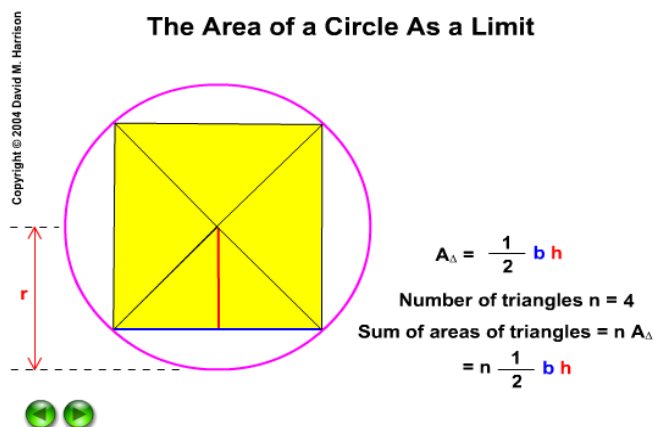


FONTE:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

Ou seja, na etapa inicial, o professor deverá relembrar alguns elementos relativos ao triângulo (elementos, cálculo da área, etc), os quais serão utilizados nas etapas seguintes.

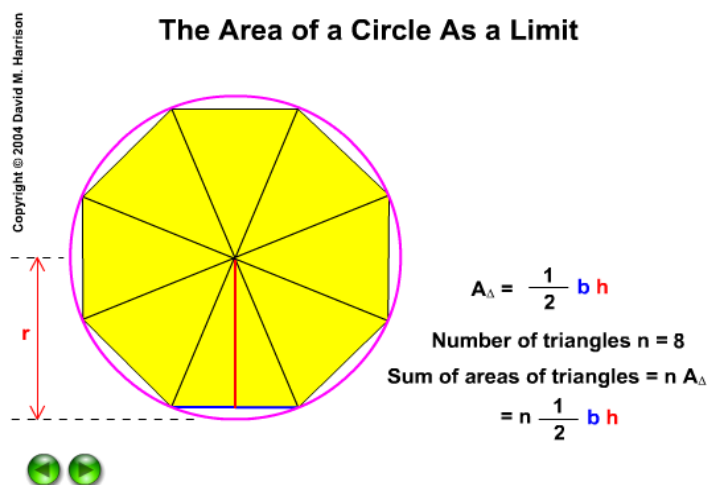
2ª Etapa: Realizando explicações gerais sobre inscrição de polígonos na circunferência, o docente deve apresentar um método prático para o cálculo da área de um quadrado inscrito numa circunferência.



FONTE:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

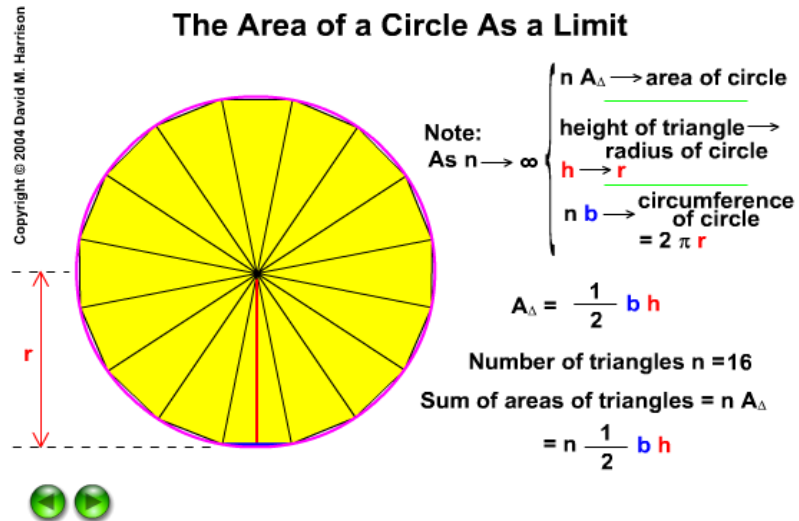
Na segunda etapa, inscreve-se um quadrado no círculo e este é dividido em quatro triângulos de mesma área, calculando-se a soma dessas áreas. NA etapa seguinte, Etapa 3, “o processo acima é repetido, sendo que o número de lados do polígono inscrito passa a ser 8 – isto é, o polígono em questão é um octógono regular”.



FONTE:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

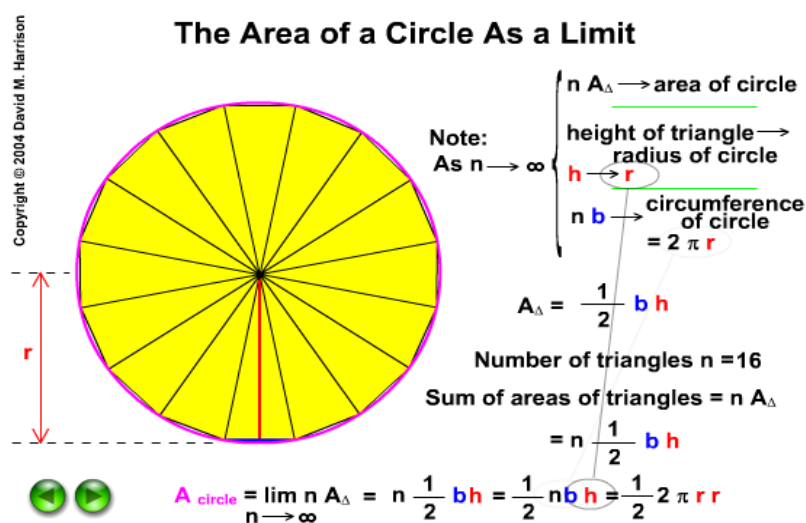
4º Etapa: “Mais uma vez, o processo é repetido; aqui, o número de lados do polígono inscrito passa a ser 16”.



FONTE:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

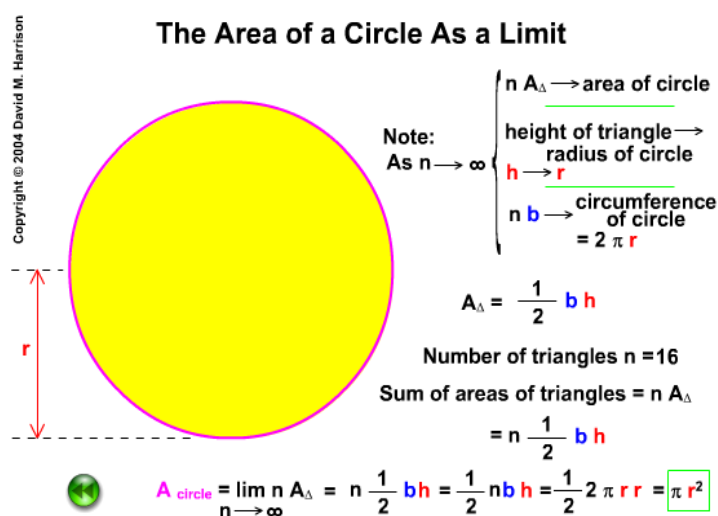
5ª Etapa: O professor deve atuar de modo que o aluno compreenda, intuitivamente, que, à medida que o número de lados do polígono tende ao infinito, a altura de cada triângulo – resultantes da decomposição do polígono – tende ao raio da circunferência, e o perímetro do polígono tende ao comprimento (sic) da circunferência.



FONTE:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

Nas “ETAPAS 6 E 7: Efetuando os cálculos, o professor deve mostrar que a área de um Círculo de raio r é dada por: π vezes o quadrado de r ”.



FONTE:

<http://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/AreaOfCircle/AreaOfCircle.html>

Como atividades complementares, o autor do Plano de Aula sugere que os alunos determinem o valor da área de outras figuras, como a área de um setor circular, de um segmento circular e de uma coroa circular.

O autor sugere, ainda, como temas para trabalhos de pesquisa para os alunos, a busca de outras aplicações para o Método da Exaustão ou “como calcular a área de uma região plana sob o gráfico de uma função”.

Note-se que com esse software o professor pode trabalhar no Ensino Médio já com a noção intuitiva de limite, o que facilitaria a compreensão dos alunos quando se deparassem com o estudo de limite no Cálculo Diferencial, no ensino superior, além de trabalhar com as ideias expostas por Arquimedes da quadratura do círculo.

Porém, o professor deve estar atento a possíveis dificuldades e problemas que possam surgir quando o software for apresentado na sala de aula, disponibilizando-se a retirar as dúvidas dos alunos, para que estes aproveitem toda a potencialidade do software.

3.2.4- A CUBAGEM DA TERRA PELOS CAMPONESES BRASILEIROS

Na maioria das vezes, a Matemática que é apresentada em sala de aula não é associada à realidade que os alunos vivenciam em seu dia a dia, o que pode prejudicar sua aprendizagem, uma vez que esse distanciamento não os ajuda a ter motivação para o estudo da disciplina. Como ressaltam os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do 5º ao 8º Anos, “a construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais”. (BRASIL, 1998, p.32). Ou seja, uma possibilidade de aproximação do aluno ao conteúdo matemático pode ser baseada na valorização de saberes matemáticos culturais, incentivando-se sua aproximação ao saber escolar.

Ao tratar da pluralidade cultural, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do 5º ao 8º Anos informam que

destaca-se, no campo da educação matemática brasileira, um trabalho que busca explicar, entender e conviver com procedimentos, técnicas e habilidades matemáticas desenvolvidas no entorno sociocultural próprio a certos grupos sociais. Trata-se do Programa Etnomatemática, com suas propostas para a ação pedagógica. Tal programa não considera a Matemática como uma ciência neutra e contrapõe-se às orientações que a afastam dos aspectos socioculturais e políticos, fato que tem mantido essa área do saber atrelada apenas a sua própria dinâmica interna. (BRASIL, 1998, p.33).

Ou seja, a Etnomatemática pode auxiliar o trabalho docente “mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural”. (BRASIL, 1998, p.33). Assim, considerando o tema de nosso trabalho de investigação, apresentaremos uma pesquisa de campo realizada com alunos de um assentamento do Movimento dos Sem-Terra (MST), tendo em vista que eles trabalham constantemente com Matemática, embora usem na prática métodos e técnicas distintos dos tradicionalmente abordados na escola.

A pesquisa tomou como objeto de estudo “*A prática social de cubação da terra*”, e foi elaborada pela Professora Gelsa Knijnik, da UFRGS. A cubação de terra compreende o processo de determinação da área de uma porção de terra.

Inicialmente a pesquisadora buscou saber dos integrantes do movimento a importância que eles atribuíam ao processo de cubação da terra. Também entrevistou um ex-avaliador do Banco Estatal e, segundo Knijnik, o avaliador relatou a dificuldade na avaliação de projetos das comunidades, pois não havia um padrão de valores quanto à área da terra avaliada estabelecendo, assim, uma justificativa clara para a pesquisa.

Dois alunos se dispuseram a expor os métodos praticados em suas comunidades no cálculo de uma área. Antes do início das exposições dos alunos, a pesquisadora sugeriu que os dados utilizados nos exemplos que usariam para explicar o processo, fossem simples, com o objetivo de enfatizar as ideias e procedimentos utilizados, sem provocar dificuldades extras com os cálculos.

Tal ideia não foi aceita pelos alunos, que alegaram se distanciar da realidade se fizessem tal restrição, já que trabalham com a medição de terrenos irregulares. O primeiro aluno, Adão, expôs o método que utilizava e que ficou conhecido pelo grupo como o “*Método do Adão*”. De acordo com Knijnik (1996), o problema de Adão consistia em encontrar a área de uma região quadrangular que tinha como medidas das divisas da terra, chamada pelo aluno de “paredes”: 90 metros, 152 metros, 114 metros e 124 metros.

O próximo passo do processo era somar as duas divisas da terra que ficavam “mais deitadas”, compreendidas pelas medidas 152 e 124 metros, chamada pelo aluno de “bases”, e dividir por dois, obtendo 138 metros. Depois, somar as outras duas medidas, 90 e 114 metros, e novamente dividir o resultado por dois, obtendo 102 metros.

Depois disso, seu problema resumia-se a encontrar a área de um retângulo de medidas 102 metros por 138 metros. Multiplicando os valores encontra-se, como valor da área, 14.076 m². Vale ressaltar que já no “Antigo Egito o cálculo de áreas de quadriláteros era realizado através de procedimentos idênticos aos envolvidos no ‘Método do Adão’”. (Peet, 1970, Coolidge, 1963, Vasconcelos, 1925 *apud* Knijnik, 1996).

O método exposto pelo aluno Jorge consiste em fazer a “quadratura” da região cuja área seria calculada, ou seja, aproximar a forma da figura correspondente à região, à forma de um quadrado. Segundo ele, como a região em questão era um quadrilátero, ele somou as medidas (mesmas medidas dos processo

do Adão) dos quatro lados e dividiu o resultado por quatro, resultando 120 metros, que corresponderia à medida do quadrado que ele fez corresponder ao quadrilátero inicial. Fazendo o cálculo da área do quadrado de lados iguais a 120 metros, obteve como resultado 14.400 m².

Nos dois métodos apresentados, a região cuja área se desejava medir era a mesma e as medidas iniciais de seus lados eram as mesmas, porém, foram obtidos valores distintos. Daí a questão, formulada pelos alunos: qual o procedimento correto?

Nesse momento, a pesquisadora destaca que “era preciso que o grupo aprendesse que a caracterização de uma superfície de terra quadrangular somente através de seus lados era insuficiente para determiná-la univocamente” (KNIJNIK, 1996, p. 37), chegando, então, em três problemas. O primeiro deles consistia na modelagem envolvida em ambos os métodos apresentados; o segundo dizia respeito à comparação dos dois métodos; e o terceiro estava na impossibilidade de determinar, de maneira única, possuindo apenas as medidas de seus lados, a área de um quadrilátero qualquer.

Para explicitar a natureza do problema, a pesquisadora trabalhou com tiras idênticas de papel, distribuindo quatro para cada aluno, que puderam perceber que poderiam encontrar quadriláteros de mesmo perímetro, porém com áreas diferentes. Os alunos perceberam os problemas que estavam envolvidos nos métodos populares da cubação de terra e estavam cientes das modelagens envolvidas em cada método, porém, eles precisavam aprender procedimentos que lhes habilitassem a obter a área de uma porção de terra, com a maior precisão possível.

Para superar essa dificuldade, os alunos foram capacitados, utilizando-se elementos da Matemática escolar, que eles aprenderam em cursos voltados para aquela comunidade. Com essa pesquisa foi possível perceber que, naquele contexto, “não havia lugar para uma matemática asséptica, neutra, desvinculada de como as pessoas usam” (KNIJNIK, 1996, p.39).

Ou seja, trabalhando com os métodos aqui descritos, no âmbito da Etnomatemática, é possível atrelar elementos da História do Cálculo, a conteúdos da Matemática que desejamos que os alunos aprendam, em especial por meio do estabelecimento de elos entre o assunto que estamos ministrando e a realidade dos

docentes, podendo, dessa forma, motivar os alunos, tanto da Licenciatura em Matemática quanto da Educação Básica, para o estudo da disciplina.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi explorar as contribuições que o uso da História da Matemática pode trazer para o ensino, em particular nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, considerando-se as demandas de formação do licenciando em Matemática.

Procuramos discutir, por essa razão, a possibilidade de conexão entre os conteúdos de nível superior, estudados pelo licenciando, com conteúdos que serão ensinados por ele na Educação Básica, como forma de alimentar o uso da História da Matemática no processo de ensino, visando tornar a aprendizagem mais significativa. Com essa visão, entendemos ser possível contribuir, de forma direta ou indireta, para a melhoria de ensino nos dois níveis de escolaridade.

Inicialmente fizemos um breve recorte histórico das origens do Cálculo Diferencial e Integral, com o objetivo de expor uma visão, que poderia ser trabalhada em sala de aula, na Universidade, de que os conceitos daquela disciplina não foram criados do nada, ou da forma pronta e acabada como é apresentada, mas foram construídos historicamente e socialmente.

No recorte histórico resgatamos alguns métodos que, vale ressaltar, quase nunca são abordados nas aulas de Cálculo. Em razão de sua potencialidade educacional, entendemos que trabalhá-los com os alunos poderia promover uma melhoria no ensino da disciplina. Caso perspectivas de mesma natureza fossem adotadas em outras disciplinas do Curso, a formação do licenciado teria mais qualidade e, como consequência, teríamos uma melhoria do ensino da Matemática na Educação Básica.

Para obtermos mais informações sobre o uso da História da Matemática na disciplina de Cálculo citada, aplicamos um questionário com questões abertas com alunos da Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Embora os alunos não tenham sido do curso de Licenciatura em Matemática, como era nosso objetivo inicialmente, pudemos constatar o quanto é escasso o uso da História da Matemática no ensino da disciplina.

Como abordamos durante todo o processo de construção deste Trabalho de Conclusão de Curso, entendemos e defendemos que a História da Matemática pode

ser uma estratégia metodológica motivadora para os alunos, no estudo da Matemática, em particular no curso de Cálculo.

Por meio da história dos conteúdos podemos ter acesso ao processo de construção do conhecimento que vem sendo estudado nas escolas a centenas de anos, proporcionando o estabelecimento de uma visão crítica e maturidade intelectual, que possivelmente irá contribuir para o desenvolvimento acadêmico e pessoal do futuro professor de Matemática.

Com a produção deste trabalho, pudemos perceber a importância do uso da História da Matemática no ensino quando, por comodidade ou outras justificativas pouco pertinentes, muitos professores preferem trabalhar os conteúdos de forma prática e direta, sem buscar as origens daquilo que ensina como fonte motivadora e esclarecedora de tais elementos.

Em nossa proposta, nossa pretensão não era trazer um projeto pronto acerca do uso da História da Matemática para ser utilizado em sala de aula, mas tentar mostrar como essa prática pode estar presente nas aulas e quais os benefícios dessa utilização.

Acreditamos que é preciso investir na melhoria da formação inicial dos futuros professores da Educação Básica, para que eles também sejam capazes de formar alunos que ingressem na Universidade com outro perfil de qualidade, uma vez que, segundo professores e alunos que responderam nosso questionário, a falta de base matemática prejudica muito o desempenho do estudante nas disciplinas.

Assim, concluímos que vivemos em um círculo vicioso, onde o corpo docente da Universidade espera dos docentes que atuam no ensino básico que estes formem melhores alunos para o ensino superior, e esses professores, por sua vez, esperam do ensino superior uma formação que o habilite para lecionar melhor.

Enquanto todos esperam, os alunos sofrem com a falta de conhecimento matemático e, sem a indicação de possíveis contribuições que venham a sanar ou pelo menos reduzir tais dificuldades o problema aumenta e, como consequência, a evasão e reprovação nos cursos de Cálculo, também.

Nesse intuito, pensamos como proposta para futuros trabalhos, realizar outras investigações envolvendo professores que lecionam no ensino básico e professores do ensino superior, com o objetivo de buscar ampliar a compreensão das possibilidades de superação do distanciamento entre esses dois níveis de

ensino e, desse modo, tentar contribuir de forma direta para a sociedade, buscando a melhoria de formação dos alunos de todos os níveis de escolaridade.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Mauro Lopes. **O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático.**

BOYER, Carl Benjamin. **Tópicos de história da matemática para o uso em sala de aula.** São Paulo: Atual, 1992

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática- 9º ano.** São Paulo: Ática, 2010.

GASPAR, Maria Terezinha; MAURO, Suzeli. **Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática.** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

KNIJNIK, Gelsa. **Exclusão e Resistência: Educação Matemática e Legitimidade Cultural.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996

GUEDIN, Juliana; UGGIONI, Edison. **Cálculo Diferencial e Integral: o ensino como uma abordagem histórica e sua contextualização.** 46 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática)- Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2004.

MEDEIROS, Luiz Adauto. **Aspectos do Teorema Fundamental do Cálculo.** Conferência proferida na faculdade de Matemática- UFPA. Belém. 2008.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação no Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

OLIVEIRA, José Sávio; ALVES, Ângela Xavier; NEVES, Sandra do Socorro de Miranda. **História da Matemática: Contribuições e descobertas para o Ensino-Aprendizagem da Matemática.**

PONTES, João Pedro; JANUÁRIO, Carlos; FERREIRA, Isabel Calado; CRUZ, Isabel. **Por uma formação inicial de professores de qualidade.** 2000

Portal do MEC.

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=17717>.

Acesso em Setembro de 2011.

APÊNDICES

Questionários

Universidade Federal da Paraíba-UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Sr(a) Professor(a),

O presente instrumento de pesquisa integra nosso trabalho de monografia de conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática e refere-se às dificuldades dos acadêmicos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ministrada na UFPB.

1. Quais as maiores dificuldades que o (a) senhor (a) observa no processo de ensino-aprendizagem da disciplina?
2. Que metodologia(s) o(a) senhor(a) utiliza nas aulas da disciplina?
3. Nas aulas da disciplina, é feita uma exposição da origem do Cálculo? Por quê?
4. Em suas aulas, o (a) senhor (a) faz uso da História da Matemática na apresentação de algum conteúdo? Em quais e de que forma?
5. Em sua opinião, que ações deveriam ser implantadas, para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Cálculo?

Universidade Federal da Paraíba-UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Caro(a) colega,

O presente instrumento de pesquisa integra nosso trabalho de monografia para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática e refere-se às dificuldades dos acadêmicos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Curso: _____

1. Quais as maiores dificuldades que você observa no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo?
2. Em sua opinião, qual a importância do Cálculo Diferencial e Integral em seu curso?
3. Alguma vez você se preocupou em saber qual a origem do Cálculo? Por que?
4. Quais recursos didáticos seu professor de Cálculo utiliza nas aulas da disciplina?
5. Que estratégias adota em sala de aula e fora dela, para o aprendizado dos conteúdos da disciplina?
6. Em sua opinião, que ações deveriam ser implantadas para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem do Cálculo?